

الموضوع الرابع

التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الاتية: (E) $11x - 5y = 2$

(1) أ - برهن أن إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب - استنتج حلول المعادلة (E).

(2) ليكن n عددا طبعيا غير معدوم ، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

أ- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب- عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a, b) = 2$.

ت- استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما .

(3) أ - أدرس حسب قيم العدد الطبعي غير المعدوم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 10 .

ب- استنتج رقم احاد العدد 7^{2014} .

ت- عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$.

التمرين الثاني:

مسابقة إمتحان شفهي تنظم بحيث يسحب المترشح عشوائيا 3 مواضيع من مجموع 80 موضوعا ويجب على المترشح أن يجيب على موضوع على الأقل من بين المواضيع الثلاثة المسحوبة .

1. ما هو عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا .

2. يتقدم مرشح لهذا الامتحان ولم يدرس سوى 50 موضوع من بين 80 ما إحتال أن :

A. " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "

B. " يجيب المترشح على موضوعين فقط "

C. " يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "

D. لا يجيب المترشح على أي موضوع "

3. ما هو عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بجدها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(4) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ إن كانت الإجابة نعم عين نهايتها .

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

ت- أحسب $\lim u_n$ و أحسب S_n المجموع بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

i. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

ii. f دالة عددية معرفة على $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها

البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين الاعداد الحقيقية a و b و c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x) = ax + b \frac{cx + d}{x^2 - 1}$

(2) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة

(3) احسب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة مستنتجا معادلات المستقيمات المقاربة .

(4) بين ان $y = x + 2$: (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) .

(5) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta) : y = x + 2$.

حل الموضوع الرابع

التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية: $(E) \quad 11x - 5y = 2$

(1) أ - البرهان أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

لدينا (E) تكافئ $-5y \equiv 2[11]$ ومنه $6y \equiv 2[11]$ إذن $2 \times 6y \equiv 2 \times 2[11]$ ومنه $y \equiv 4[11]$

ب - استنتاج حلول المعادلة (E) .

مما سبق لدينا $y \equiv 4[11]$ ومنه $y = 11k + 4$ ، بالتعويض في المعادلة (E) نجد $x = 5k + 2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 11k + 4 \end{cases}$ حيث k عدد صحيح .

(2) ليكن n عددا طبعيا غير معدوم ، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نفرض أن $PGCD(a;b) = d$ إذن d يقسم a و d يقسم b ومنه d يقسم $11a - 5b$ نستنتج أن d يقسم 2

إذن $d \in \{1; 2\}$.

ب- تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b) = 2$.

لدينا $PGCD(a;b) = 2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b ومنه 2 يقسم $b - 2a$ إذن 2 يقسم $(11n + 4) - 2(5n + 2)$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبعي زوجي)

ت- استنتاج قيم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما :

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a;b) = 1$ وهذا يكافئ $PGCD(a;b) \neq 2$ ومنه قيم n المطلوبة

هي $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبعي فردي)

(3) أ - دراسة حسب قيم العدد الطبيعي غير المعلوم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7 على 10 .

$$7 \equiv 1[10]$$

$$7 \equiv 7[10]$$

$$7 \equiv 9[10]$$

$$7 \equiv 3[10]$$

$$7 \equiv 1[10]$$

ومنه نلخص النتائج في الجدول التالي :

قيم n	$4k'$	$4k'+1$	$4k'+2$	$4k'+3$
البواقي	1	7	9	3

ب- استنتاج رقم احاد العدد 7^{2014} .

رقم احاد العد هو باقي قسمته على 10 و لدينا $2014 = 4 \times 503 + 2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل $4k' + 2$ إذن حسب الجواب السابق رقم احاد العدد هو 9

ت- تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ وتحقق $7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه $k' = 4\lambda + 2$ ومنه :

لدينا $7^{y-2x} = 7^{11k'+4-10k'-4} = 7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه $k' = 4\lambda + 2$ ومنه :

$$\begin{cases} x = 5(4\lambda + 2) + 2 = 20\lambda + 12 \\ y = 11(4\lambda + 2) + 4 = 44\lambda + 26 \end{cases} \quad / (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني:

1. إيجاد عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا هو $C_{80}^3 = 82160$

2. حساب احتمال كل من :

A. " يجب المترشح على المواضيع الثلاثة "

$$P(A) = \frac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \frac{19600}{82160} = \frac{245}{1027} \approx 0,24$$

B. " يجب المترشح على موضوعين فقط "

$$P(B) = \frac{C_{50}^2 \times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{3675}{8216} \approx 0,45$$

C. " يجب المترشح على موضوع واحد فقط "

$$P(C) = \frac{C_{50}^1 \times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = \frac{2175}{8216} \approx 0,26$$

D. لا يجيب المترشح على أي موضوع "

$$P(D) = \frac{C_{30}^3}{C_{80}^3} = \frac{4060}{82160} = \frac{406}{8216} \approx 0,05$$

3. إيجاد عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99 :

نسمي عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها ومنه نحل المتراجحة : $1 - \frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,99$ أي $\frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,01$ أي $C_{80-x}^3 \geq 821,6$

ونجد : $(80-x)(79-x)(78-x) > 4929$

- من أجل $x = 61$ نجد : $(80-61)(79-61)(78-61) = 5814$

- من أجل $x = 62$ نجد : $(80-62)(79-62)(78-62) = 4896$

- من أجل $x = 61$ نجد : $(80-63)(79-63)(78-63) = 4080$

ومنه قيمة هي 62 ونقول على أنه على المترشح أن يدرس على الأقل 62 موضوع لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه

على الأقل يتجاوز 0,99

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بجدها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 - \frac{1}{2u_n + 1} \\ &= \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} \quad : \text{بتوحيد المقامات نجد} \\ &= \frac{2u_n}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} \quad : \text{ومنه}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

لدينا : $0 < u_0 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ محققة

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ، نضرب في العدد 2 : $0 < 2u_n < 1$ ، بإضافة العدد 1 نجد : $1 < 2u_n + 1 < 2$

نقلب نجد : $\frac{1}{2} > \frac{1}{2u_n + 1} > 1$ ، نضرب في العدد -1 نجد : $-1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$ ، بإضافة العدد 1 نجد :

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad 0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$$

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$ ، واستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1} \quad \text{لدينا :}$$

اتجاه تغير المتتالية : بما أن $0 < u_n < \frac{1}{2}$ فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$ عدد موجب ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(4) دراسة تقارب (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ- اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} \quad \text{ومنه}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

$$\text{ب- كتابة } v_n \text{ بدلالة } n : v_0 = \frac{u_0}{2u_0 - 1} = -\frac{1}{3} \quad \text{ومنه} \quad v_n = -\frac{6^n}{3}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

$$\text{لدينا } u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}} \quad \text{ومنه} \quad v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1} \quad \text{أي} \quad v_n(2u_n - 1) = 3^n u_n \quad \text{أي أن} \quad v_n = u_n(2v_n - 3^n)$$

$$\text{ومنه} \quad u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$$

ومنه بالتعويض نجد :

$$u_n = \frac{\left(-\frac{6^n}{3}\right)}{2\left(-\frac{6^n}{3}\right) - 3^n} = \frac{\left(-\frac{6^n}{3}\right)}{\left(-\frac{2 \times 6^n - 3^{n+1}}{3}\right)} = \frac{-6^n}{-2 \times 6^n - 3^{n+1}} = \frac{3^n \times 2^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3^n \times 3} = \frac{\cancel{3^n} \times 2^n}{\cancel{3^n} (2^{n+1} + 3)} = \boxed{\frac{2^n}{2^{n+1} + 3}}$$

ت- حساب $\lim u_n$ وحساب S_n المجموع بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

لدينا : $\frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$ ومنه $S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^2}\right) + \dots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$

أي أن : $S_n = 2(n+1) + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$ ومنه : $S_n = 2(n+1) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

أي أن : $S_n = 2(n+1) - 2\left[\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right]$

التمرين الرابع :

i. دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

(1) دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها :

● النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

● المشتقة : الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 3x^2 - 3$

$$g'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{3}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$$

ونلخص إشارة المشتقة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	1	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

● تشكيل جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$	

(2) التبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,3$

الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[2; 2,3]$ ولدينا : $g(2) = -2$ ، $g(2,3) = 1,27$ أي $g(2) \times g(2,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,3$.

(3) استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ ونوضحها في الجدول الموالي :

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	0	$+\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

ii. f دالة عددية معرفة على $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تعيين الاعداد الحقيقية a و b و c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x) = ax + b \frac{cx + d}{x^2 - 1}$

باستخدام احدى الطرق سواء كانت طريقة المطابقة او القسمة الاقليدية نجد : $g(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

أي : $a=1$ و $b=2$ و $c=1$ و $d=2$

(2) التبين انه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ ، و استنتاج اتجاه تغير الدالة :

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} : \text{ومنه } f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{أي أن :}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x \cdot g(x)$ ونلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
إشارة x	-	-	0	+	+	+
إشارة $g(x)$	-	-	-	-	0	+
إشارة $\frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$	+	+	0	-	-	+

متزايدة على المجال $[-\infty; -1[\cap]-1; 0] \cap]\alpha; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $[0; 1[\cap]1; \alpha]$

(3) حساب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة واستنتاج معادلات المستقيمات المقاربة .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$$

ومنه $x = -1$ و $x = 1$ هما معادلتا المستقيمان المقاربان للمنحنى (C_f) .

(4) اثبات أن $y = x + 2$: مستقيم مقارب لـ (C_f) :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

(5) تشكيل جدول تغيرات الدالة f و دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = x + 2$:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$+\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = x + 2$:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

✓ (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين $]-2; -1[$ و $]1; +\infty[$

✓ (C_f) يقع تحت (Δ) على المجالين $]-\infty; -2[$ و $]-1; 1[$