المادّة: رياضيات
المستوى: 3 ت إ

التوقيت: 2سا و30د
التاريخ: 2022/12/07

امتحان الفصل الأوّل

التمرين الأول: (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=-2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n<2$

3) جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

4) لتكن (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2u_n-4$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول.

ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$

ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين الثاني: (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقتين: $-u_0=8+u_2$ و $u_0-5u_1=22$

1) بيّن أنّ $u_1=-4$ ثم استنتج قيمة u_0.

2) أحسب الأساس r ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-6n+2$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

4) استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n=3^2\times3^{-4}\times3^{-10}\times...\times3^{-6n+2}$

(v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}u_n+\frac{2}{6}}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I- نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ كما يلي: $f(x)=a+\dfrac{b}{x^2-2x-3}$

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

- عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث المنحني $(\mathcal{C})$ يشمل النقطة $A(-3;0)$ و يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ موازي لمحور الفواصل.
- نضع فيما يلي: $a=1$ و $b=-12$

1) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ فإنّ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

3) أدرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=1$.

4) أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحني $(\mathcal{C})$.

6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة $(5;0)$.

7) عيّن احداثيات نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محوري الإحداثيات.

8) أنشئ المنحني $(\mathcal{C})$ و المماس (T).

II- نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=|f(x)|$

1) أدرس اشارة الدالة f ثم عرّف الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3) اشرح كيفية انشاء (c_g) انطلاقا من $(\mathcal{C})$ ثم أنشئه في نفس المعلم بلون مغاير.

4) حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة: $g(x)=\dfrac{20}{x^2-2x-3}$.

مدرسة "الرجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

إعداد: بوشاشية وليد

www.ecolerradja.com
www.fb.com/ecolerradja

تصحيح الإختبار

التمرين 1:

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

① $U_1 = 0 \qquad U_2 = 1 \qquad U_3 = \frac{3}{2}$

$U_0 < U_1 < U_2 < U_3$ إذن: (U_n) متزايدة تماما

② البرهان بالتراجع:

- التحقق من صحة $P_{(0)}$: $U_0 < 2$

$-2 < 2 \Rightarrow$ محققة

- نفرض صحة $P_{(n)}$: $U_n < 2$

- نبين صحة $P_{(n+1)}$: $U_{n+1} < 2$

لدينا: $U_n < 2$

$\frac{1}{2}U_n < 1$

$\frac{1}{2}U_n + 1 < 2$

$\boxed{U_{n+1} < 2}$

③ إتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - U_n$

$= \frac{-U_n + 2}{2}$

لدينا: $U_n < 2$

$-U_n > -2$

$-U_n + 2 > 0$

$\frac{-U_n + 2}{2} > 0$

$\Rightarrow (U_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

التقارب:

بما أن: (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(U_n < 2)$

إذن: هي متقاربة.

④ $V_n = 2U_n - 4$

$V_{n+1} = q V_n$

$V_{n+1} = 2U_{n+1} - 4$

$= 2\left(\frac{1}{2}U_n + 1\right) - 4 \Rightarrow = U_n + 2 - 4$

$= U_n - 2 \Rightarrow = \frac{1}{2}(2U_n - 4)$

$\wedge V_n$

$V_0 = 2U_0 - 4 = 2(-2) - 4 = \boxed{-8}$

$V_n = V_p \times q^{n-p} \Rightarrow = V_0 \times q^{n-0}$

$\boxed{V_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$V_n = 2U_n - 4 \Rightarrow V_n + 4 = 2U_n$

$U_n = \frac{V_n + 4}{2}$

$U_n = \frac{-8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}{2} \Rightarrow \boxed{U_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

النهاية:

$\lim_{n \to +\infty} -4\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} + 2 \boxed{= 2}$

⑤ المجموع:

$V_1 + V_2 + \dots\dots + V_n$

$= V_1\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) \Rightarrow = -4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

$= -4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \times \frac{2}{1} \Rightarrow = -8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$U_n = \frac{V_n + 4}{2} = \frac{1}{2}V_n + 2$

$= \frac{1}{2}V_1 + 2 + \frac{1}{2}V_2 + 2 + \dots\dots + \frac{1}{2}V_n + 2$

$= \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \dots + \frac{1}{2}V_n + 2 + 2 + \dots + 2$

$= \frac{1}{2}(V_1 + V_2 + \dots + V_n) + 2n$

$= \frac{1}{2}\left[-8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] + 2n$

$\boxed{= -4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n}$

مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

التمرين 2 :

$$\begin{cases} U_0 - 5U_1 = 22 \\ -U_0 = 8 + U_2 \end{cases}$$

(1) $-8 = U_0 + U_2 \Rightarrow -8 = 2U_1$

$$\boxed{U_1 = -4}$$

$U_0 - 5(-4) = 22 \Rightarrow U_0 + 20 = 22$

$$\boxed{U_0 = 2}$$

(2) $U_1 = U_0 + r \Rightarrow -4 = 2 + r$

$$\boxed{r = -6}$$

$U_n = U_p + (n-p)r$

$= U_0 + (n-0)r \Rightarrow = 2 + (n)(-6)$

$$\boxed{= -6n + 2}$$

(3) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$= \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

$= \frac{n+1}{2}(2 + -6n + 2)$

$= \frac{(n+1)}{\cancel{2}}(-3n+2) \times \cancel{2}$

$$\boxed{= (n+1)(-3n+2)}$$

(4) $P_n = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^{-10} \times \dots \times 3^{-6n+2}$

$= 3^{U_0} \times 3^{U_1} \times 3^{U_2} \times \dots \times 3^{U_n}$

$= 3^{S_n}$

$$\boxed{= 3^{(n+1)(-3n+2)}}$$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}U_n + \frac{2}{6}}$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-U_n+2}{6}} \Rightarrow = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\cancel{6}n - \cancel{2} + \cancel{2}}{\cancel{6}}}$

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(1) $v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ $\quad \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{1}$

(2) $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

$= 1\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \times \frac{2}{1}$

$$\boxed{= 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

التمرين 3 :

$f(x) = a + \frac{b}{x^2 - 2x - 3}$

تعيين a و b : $f(-3) = 0 \;/\; f(1) = 4$

$\rightarrow f(-3) = a + \frac{b}{12} = 0$

$\rightarrow f(1) = a + \frac{b}{-4} = 4 \Rightarrow 1 + \frac{b}{-4} = 4$

$\frac{b}{-4} = 3 \Rightarrow b = 3 \times -4 \Rightarrow \boxed{b = -12}$

$a + \frac{-12}{12} = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$ بالتعويض نجد :

$$\boxed{a = 1}$$

$f(x) = 1 + \frac{-12}{x^2 - 2x - 3}$

(1) التحقق :

$f(x) = \frac{1(x^2 - 2x - 3) - 12}{x^2 - 2x - 3}$

$$\boxed{= \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}}$$

(2) النهايات :

$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$

مؤسسة "الإبداع والتفوق" الخاصة
Ecole Erradja wa Tafouk
ÉCOLE PRIVÉE

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

⑤ $x=1$ محور تناظر :

$$f(2a-x)=f(x) \Rightarrow f(2-x)=f(x)$$

$$f(2-x)=1-\frac{12}{(2-x)^2-2(2-x)-3}$$

$$=1-\frac{12}{\cancel{4}+x^2-4x-\cancel{4}+2x-3}$$

$$=1-\frac{12}{x^2-2x-3}=f(x)$$

⑥ معادلة المماس عند $(5;0)$:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$=f'(5)(x-5)+f(5) \Rightarrow =\frac{2}{3}(x-5)+0$$

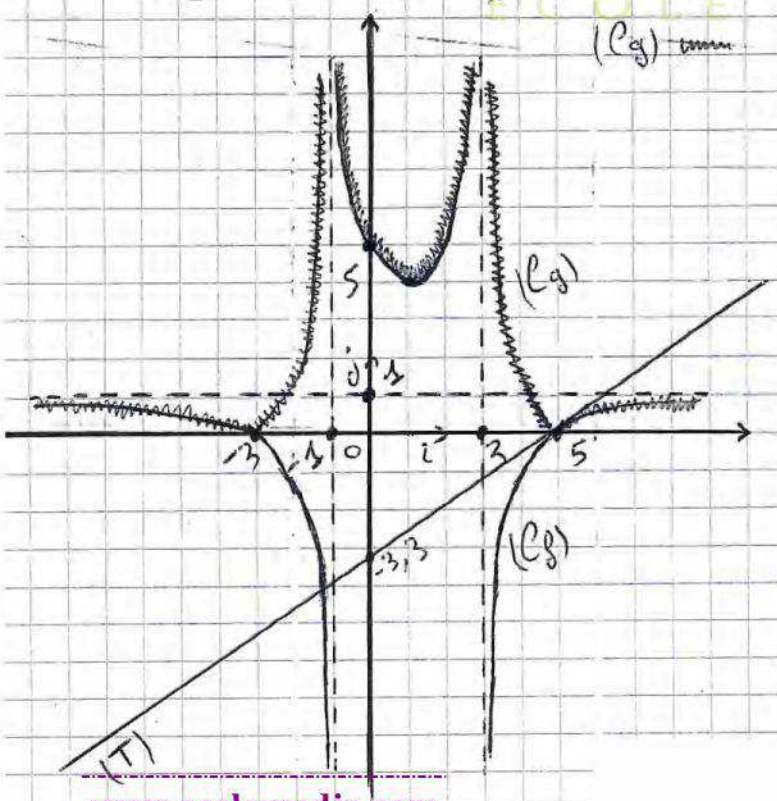
$$\boxed{y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}}$$

⑦ التواتيب : $f(0)=5 \quad (0;5)$

الفواصل : $f(x)=0 \quad x^2-2x-15=0$

$x_1=5 \quad (5;0)$ ، $x_2=-3 \quad (-3;0)$

⑧ إنشاء المنحنى (C) والمماس (T) و (C_g) :



$$\begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ & -1 & & 3 & \end{array}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=-\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} x^2-2x-15=-12 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=+\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2-2x-15=-12 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x)=+\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} x^2-2x-15=-12 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x)=-\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} x^2-2x-15=-12 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي

$x=3$ مستقيم مقارب عمودي

③ الوضعية بالنسبة للمستقيم (Δ) "$y=1$" :

$$f(x)-y=\cancel{1}+\frac{-12}{x^2-2x-3}-\cancel{1}$$

$$=\frac{-12}{x^2-2x-3}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
-12		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{-12}{x^2-2x-3}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
الوضعية		تحت	‖	فوق	‖	تحت	

④ بيان أن :

$$f'(x)=\frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

$]-\infty;-1[$ و $]-1;1]$ f متناقصة تماما

$[1;3[$ و $]3;+\infty[$ f متزايدة

مدرسة الرجاء والتفوق الخاصة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ECOLE PRIVEE

II - g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=|f(x)|$

① إشارة f:

x	$-\infty$		-3		-1		3		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

الدالة g دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) &]-\infty;-3]\cup]-1;3[\cup[5;+\infty[\\ -f(x) & [-3;-1[\cup]3;5] \end{cases}$$

② جدول تغيرات g:

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		5		$+\infty$
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

④ حل جبريا في $\mathbb{R}$ المعادلة: $g(x)=\dfrac{20}{x^2-2x-3}$

$$|f(x)|=\frac{20}{x^2-2x-3}$$

$$-f(x)=\frac{20}{x^2-2x-3} \qquad\qquad f(x)=\frac{20}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{-x^2+2x+15}{\cancel{x^2-2x-3}}=\frac{20}{\cancel{x^2-2x-3}} \qquad\qquad \frac{x^2-2x-15}{\cancel{x^2-2x-3}}=\frac{20}{\cancel{x^2-2x-3}}$$

$$-x^2+2x+15=20 \qquad\qquad x^2-2x-15=20$$

$$-x^2+2x+15-20=0 \qquad\qquad x^2-2x-15-20=0$$

$$-x^2+2x-5=0 \qquad\qquad x^2-2x-35=0$$

لا يوجد حلول

$$x_1=7 \qquad\qquad x_2=-5$$

Boulghachia

مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE