

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق) الامتحان التجريبي لباكوريا 2022 في مادة الرياضيات

المدة : أربع ساعات و نصف

الشعبة : تقني رياضي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول (04ن) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : a_n = 2 \times 5^n + 7$

(1) أ- بَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون a_n فردي.

ب- عَيِّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 8.

ج- استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $a_n \equiv 1[8]$.

(2) أ- برهن أنه إذا كان:
$$\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$$
 فإن: $x \equiv 257[1000]$.

ب- بَيِّن أنه من أجل $n \geq 3$ يكون: $a_n \equiv 257[1000]$.

ج- ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2022} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$ ؟

(3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب- نعتبر $\text{PGCD}(a_{2n}; a_{2n+1}) = d$ ، بَيِّن أن d يختلف عن 7 ثم عَيِّن قيمته.

التمرين الثاني (04ن) يوجد جواب صحيح واحد بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية، عينه مع التبرير.

(1) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما، قيم

مجموعة قم α التي تكون من أجلها (v_n) متتالية متقاربة هي:

(أ) $\left]0; \frac{3}{2}\right[$ (ب) $] -1; 1[$ (ج) $\left]0; \frac{2}{3}\right[$

(2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ والذي يحقق الشرط $f(0) = 4$ هو:

(أ) $f(x) = 3e^{\frac{2}{3}x} + 1$ (ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ (ج) $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x} + 2$

(3) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1) = 0$ هي الدالة المعرفة بـ:

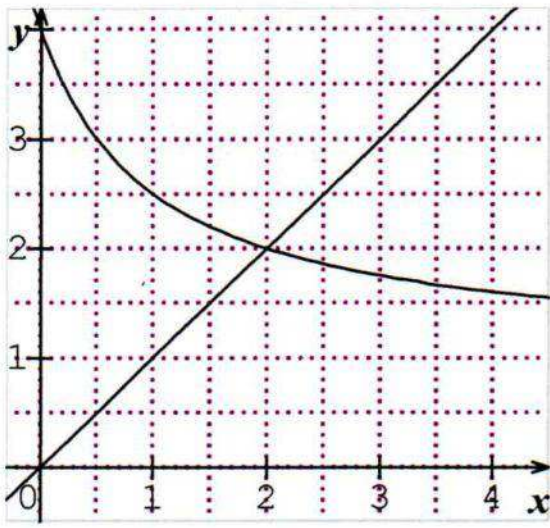
(أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ (ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ (ج) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

(4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N = \overline{01355}_6$ ، كتابته في النظام العشري هي:

(أ) $N = 2022$ (ب) $N = 1439$ (ج) $N = 1962$

التمرين الثالث (05ن) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (أنظر الشكل).



(1) بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(2) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) انقل الشكل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء،

ثم أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{12}{u_n + 2} - 3$

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

(ب) أوجد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+2022}$

أحسب بدلالة n المجموع P_n بحيث: $P_n = \frac{1}{u_n + 2} + \frac{1}{u_{n+1} + 2} + \frac{1}{u_{n+2} + 2} + \dots + \frac{1}{u_{n+2022} + 2}$

التمرين الرابع (07) g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x - \ln x$

(1) (أ) أدرس تغيرات الدالة g .

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,56 < \alpha < 0,57$ ثم استنتج إشارة g على $]0; +\infty[$

(2) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(ب) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث $0,2 < x_0 < 0,3$ و $2,2 < x_1 < 2,3$.

(4) بيّن أن $f(\alpha) = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(5) (γ) هو المنحنى الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق.

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ثم فسر النتيجة بيانياً ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

(6) (أ) احسب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$ ثم ارسم (γ) و (C_f) .

(ب) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.

(7) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = e$.

- احسب A بدلالة α ثم تحقق أن: $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ مستنتجاً حصراً لـ A الصفحة 2 من 5

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05ن) لكل سؤال جواب واحد صحيح فقط من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التبرير:

1. حل المعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ و الذي يحقق $f(0) = 4$ هو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

(أ) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} - 3$ (ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ (ج) $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x} + 3$

2. مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2$ في $\mathbb{R}$ هي:

(أ) $S = [-2; 2]$ (ب) $S =]1; 2]$ (ج) $S = [-2; 1]$

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x2^{-x}$ ، f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' هي:

أ/ $f'(x) = (1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ ب/ $f'(x) = (1-x)2^{-x}$ ج/ $f'(x) = (2+x\ln 2)2^{-x}$

4. x عدد حقيقي موجب تماما ، التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ يساوي:

(أ) $\frac{-2\ln x - 1}{x}$ (ب) $\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ (ج) $\frac{-\ln x - 1 + x}{x}$

5. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

(أ) $f(-2-x) = f(x)$ (ب) $f(2-x) = f(x)$ (ج) $f(-x) = f(x)$

التمرين الثاني (04ن) α ، β عدنان طبيعيان كل منهما أصغر من 7؛ وليكن A العدد الطبيعي المضاعف لـ

7 والذي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 9 و 7 على الترتيب بـ: $2\alpha 8\beta$ و $5\alpha 1\beta$
(1) جد α ، β ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

(2) أحسب $PGCD(2016, 2268, 2772)$

(3) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية Z المعادلة ذات المجهولين x ، y

$$2772x - 2268y = 2016 \dots\dots\dots (E)$$

أ. بيّن انه من أجل كل عددين حقيقيين x ، y المعادلة (E) تكافئ $11x - 9y = 8$

ب. جد (x_0, y_0) حل للمعادلة (E) والتي تحقق $x_0 + y_0 = 8$

ت. استنتج في Z^2 مجموعة حلول المعادلة (E).

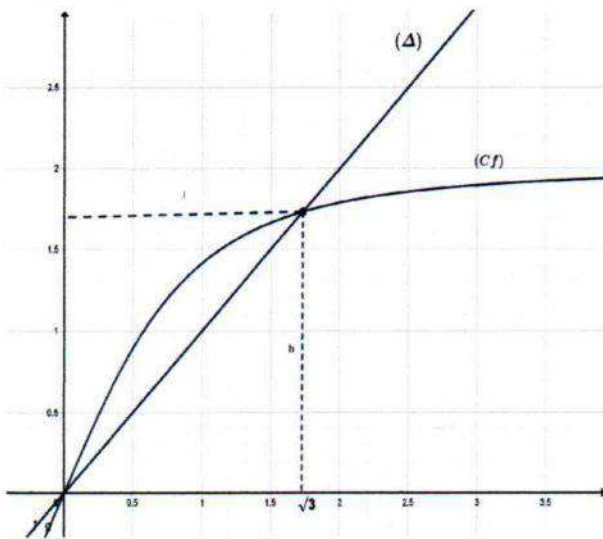
(4) بفرض x و y موجبان و أن (x, y) حل للمعادلة (E) وبوضع $PGCD(x, y) = d$

أ. أوجد القيم الممكنة لـ d

ب) استنتج كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $PGCD(x, y) = 2$

التمرين الثالث (04ن)

- (1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



- (أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0, +\infty[$
 (ب) بيّن أنه إذا كان $x \in [0, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$
 (2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي :
 $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
 (أ) باستعمال التمثيل البياني (C_f) والمستقيم (Δ)
 مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل دون حسابها
 مبرزا خطوط التمثيل

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

- (ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

- (ج) بيّن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

- (د) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

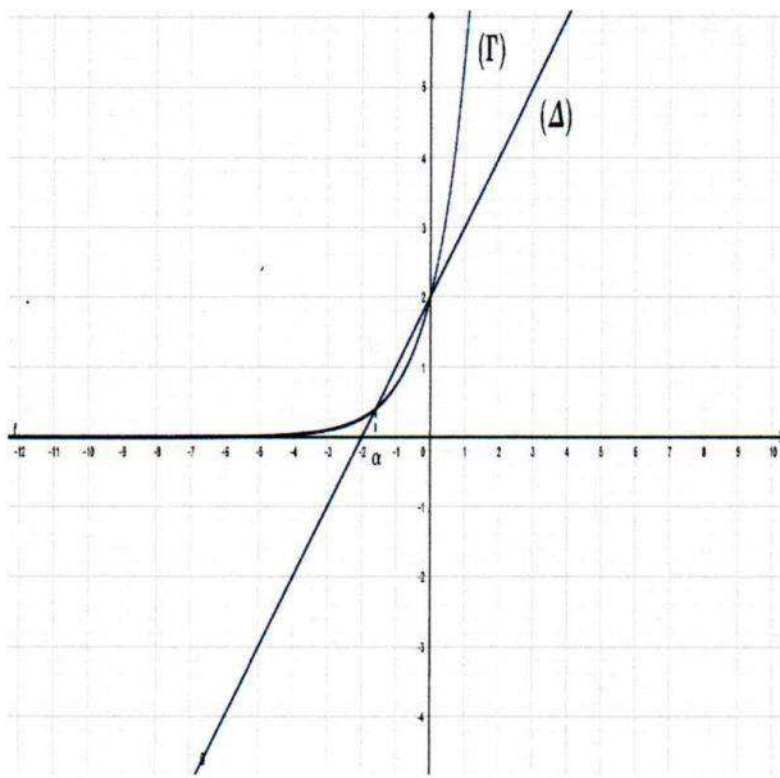
- (4) أحسب p_n بدلالة n حيث: $p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$

التمرين الرابع (07ن)

(I) المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الشكل أدناه يتضمن (Γ) التمثيل البياني للدالة:

$x \rightarrow 2e^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x + 2$ ، 0 و α هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ)
 حيث : $-1,5 < \alpha < -1,6$

- (1) بقراءة بيانية حدّد وضعية المنحني (Γ) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$



2) g لدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$

ب : $g(x) = -2e^x + x + 2$

حدّد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$f(x) = 2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}$

(C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أ - أحسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$

: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$

ج) عيّّن دون حساب : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$

ثم فسّر النتيجة هندسياً.

المستقيم (D) ذو المعادلة : $y = 2(ex - 3)$ هو

مستقيم مقارب ل (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

ب) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

ج) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها β حيث : $-2,4 < \beta < -2,3$.

3) أنشئ كل من (D) و (C_f) . نأخذ $f(-3) \approx -22.31$ و $f(\alpha) \approx 4.15$

4-أ) جد العددين الحقيقيين a, b حتى تكون الدالة $x \rightarrow \tilde{f}(ax + b)e^{-x+1}$ أصلية للدالة $x \rightarrow (x + 3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$

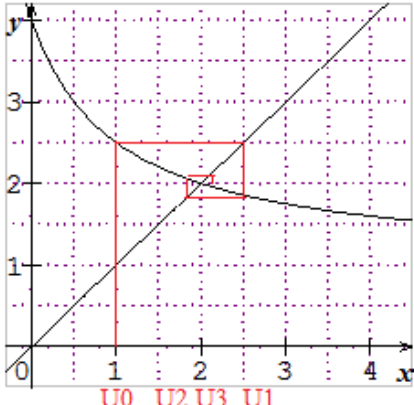
ب) أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين الذين معادلتها : $x = n$ و $x = 1$

حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

العلامة	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	
04	0.5	لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n: a_n = 2 \times 5^n + 7$ (1) أ- بما أن a_n هو مجموع عددين أحدهما فردي والآخر زوجي إذا هو عدد فردي.....
	0.5	ب- n بواقي قسمة العدد 5^n على 8: من أجل $n = 2k$: $5^n \equiv 1[8]$ و من أجل $n = 2k + 1$: $5^n \equiv 5[8]$
	0.5	ج- بما أن $2 \times 1 + 7 \equiv 1[8]$ و $2 \times 5 + 7 \equiv 1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n \equiv 1[8]$
	0.75	(2) أ- إذا كان: $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن: $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 128x \equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد $3x \equiv 771[1000]$ أي $9x \equiv 313[1000]$ إذا نجد $\begin{cases} 8x \equiv 56[1000] \\ 9x \equiv 313[1000] \end{cases}$ ومنه $x \equiv 257[1000]$ ب- من أجل $n \geq 3$ يكون: 5^n مضاعف لـ 125 ومنه نجد $a_n \equiv 7[125]$ ولدينا $a_n \equiv 1[8]$ إذا نستنتج أن $a_n \equiv 257[1000]$ ج- بما أن $a_{2021} \equiv 257[1000]$ و $a_{2022} \equiv 257[1000]$ فإن $a_{2021} \times a_{2022} \equiv 257^2[1000]$ أي $a_{2021} \times a_{2022} \equiv 49[1000]$ إذا الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2022} + 7)$ هي 049.....
	0.25	(3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
	0.25	ب- إذا كان $\text{PGCD}(a_{2n}; a_{2n+1}) = d$ فإن d يقسم a_n وبما أن 2×5^n ليس مضاعف لـ 7 فإن d يختلف عن 7..... د d يقسم 28 ويختلف عن 7 و a_n فردي إذا $d = 1$
04	01	(1) قيم α التي تكون من أجلها (v_n) متقاربة هي: (أ) $\left[0; \frac{3}{2}\right[$ + التبرير.....
	01	(2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ والذي يحقق الشرط $f(0) = 4$ هو: (ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ + التبرير.....
	01	(3) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1) = 0$ للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x+1}{x}$ هي الدالة: (أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ + التبرير.....
	01	(4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N = 01355_6$ ، كتابته في النظام العشري هي: (ب) $N = 1439$ + التبرير.....

التعريب الأول

التعريب الثاني

	0.5	f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$. (1) بما أن $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$ فإن f متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.	
05	0.75	(2) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى:  التخمين: المتتالية (u_n) غير رتيبة ومتقاربة نحو 2	
	0.75	ب - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$: لدينا $1 \leq u_0 \leq \frac{5}{2}$ ونفرض أن $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ فنجد $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$ ومنه $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$	
	0.75	(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ: $v_n = \frac{12}{u_n + 2} - 3$ أ - بما أن $v_n = \frac{6 - 3u_n}{u_n + 2}$ ولدينا $v_{n+1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{6 - 3u_n}{u_n + 2} \right)$ إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 1$	التعريف الثالث
	0.25	ب - عبارة الحد العام: $v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n = \frac{12}{3 + v_n} - 2 = \frac{12}{3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 2$ حساب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ ت - حساب S_n: $S_n = 1 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}}{1 + \frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{2023} \right)$ حساب P_n:	
	0.5		

		$P_n = \frac{1}{12}(v_n + 3 + v_{n+1} + 3 + v_{n+2} + 3... + v_{n+2022} + 3)$ $. P_n = \frac{1}{12}(S_n + 3 \times 2023)$											
07	0.5	I. الدالة g معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $g(x) = -x - \ln x$	التمرين الرابع										
	0.25	(1) أ- $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة. ب- بما أن الدالة g رتيبة و $g(0.56) \times g(0.57) < 0$ فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56 < \alpha < 0,57$ إشارة $g(x)$:											
	0.25	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>+</td><td>-</td></tr></table>		x	0	α	$+\infty$	$g(x)$		+	-		
	x	0		α	$+\infty$								
	$g(x)$			+	-								
	0.5	(2) أ- من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ نجد: $f(x) = \frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$											
0.25	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $x = 0$ معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C)												
0.5	ب- من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ نجد: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$:												
0.75	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$f(\alpha)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	α	$+\infty$	$f'(x)$		-	+	$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$
x	0	α	$+\infty$										
$f'(x)$		-	+										
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$										
0.5	(3) حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,2 < x_0 < 0,3$ و $2,2 < x_1 < 2,3$ إذا المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين												
0.25	(4) من $g(\alpha) = 0$ لدينا $\ln \alpha = -\alpha$ وبالتعويض نجد: $f(\alpha) = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$												
0.25	حصر $f(\alpha)$ $-1.35 \leq f(\alpha) \leq -1.31$												

0.5

$$(5) \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 - \ln x}{x} \right] = 0$$

ومنه المنحنى (γ) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f)

- وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) :

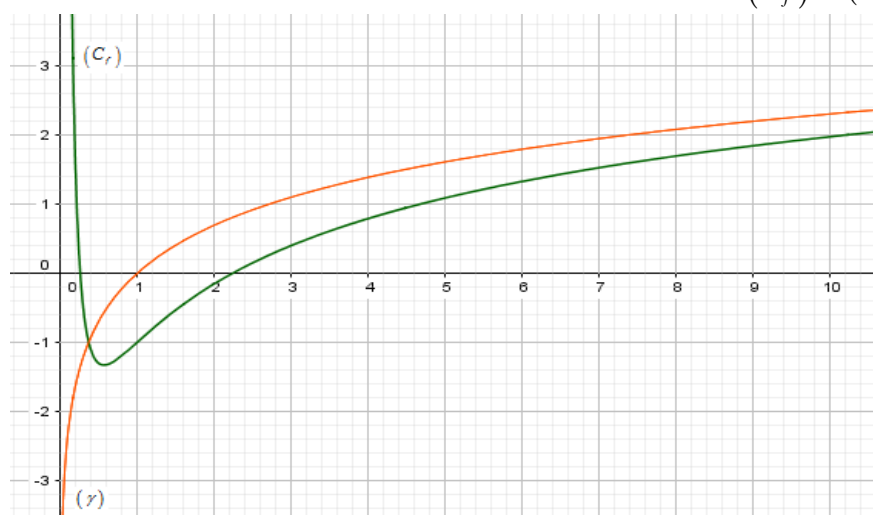
0.5

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x) - \ln x$		0	
الوضع النسبي		تقاطع	
	(C_f) فوق (γ)		(C_f) تحت (γ)

(6) أ- حساب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$

ارسم (γ) و (C_f)

0.5



0.5

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x) = m$

$m < f(\alpha)$ لا يوجد حلول

$m = f(\alpha)$ يوجد حل وحيد

$m > f(\alpha)$ يوجد حلين مختلفين

0.5

(7) حساب المساحة A :

$$A = \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^e = \frac{3}{2} - \ln \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2$$

0.25

- التحقق أن: $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ بتعويض $\ln \alpha = -\alpha$

حصر A :

$$1.89 < A < 1.91$$

0.25

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجزأة	كاملة		
05 ن		حل التمرين الأول: 1-الإجابة الصحيحة هي : (ب) التبرير : $3y' - 2y + 6 = 0$ $y' = \frac{2}{3}y - 2$ يكافئ $y = ce^{\frac{2}{3}x} + 3$ $f(x) = ce^{\frac{2}{3}x} + 3$ ومنه 2-الإجابة الصحيحة هي: (ب) التبرير : $D =]1; +\infty[$ $\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2 \ln 2 \dots\dots\dots (1)$ $\ln[(x-1)(x+2)] \leq \ln 4 \quad (1) \text{ يكافئ}$ $x^2 + 2x - x - 2 \leq 4$ $x^2 + x - 6 \leq 0$ $S =]1; 2]$ ومنه 3--الإجابة الصحيحة هي: (أ) التبرير $f(x) = xe^{-x} :$ $f'(x) = xe^{-x \ln 2}$ يكافئ $f'(x) = e^{-x \ln 2} + (-\ln 2)e^{-x \ln 2} .x$ $f'(x) = e^{-x \ln 2} (1 - x \ln 2)$ ومنه 4---الإجابة الصحيحة هي: (ج)	<u>التمرين</u> <u>الأول</u>
	01ن		
	01ن		
	01ن		
	01ن		

التبرير: $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt$

$$= \frac{-\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t} + c \right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} + c - 1 - c \right)$$

$$= \frac{-\ln x - 1 + x}{x}$$

5-الإجابة الصحيحة هي: (أ)

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

التبرير:

$$f(-2-x) = \ln[(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 3]$$

$$= \ln(4 + x^2 + 4x - 4 - 2x + 3)$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$= f(x)$$

التمرين الثالث:

أ- تحديد اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ و $f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ هذا يعني

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0, +\infty[$

1-ب) نبين إذا كان $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ فإن $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$

لدينا من أجل $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ فإن $f(1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$ (لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1, \sqrt{3}]$) ومنه

$$\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{3} \text{ ومنه } 1 \leq \sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{3} \text{ ومنه } 1 \leq f(x) \leq \sqrt{3} \text{ وهو المطلوب}$$

2-أ) تمثيل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل

نسقط النقطة $M_0(u_0 = 1, u_1)$ على (Δ) وفق (ox) ثم نسقط نقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (oy) نحصل على النقطة

$M_1(u_1, u_2)$ وهكذا نكرر العملية نحصل على M_2

01ن

04ن

0.5ن

0.25ن

0.25ن

ب) يبدو من خلال الرسم المتتالية (u_n) متزايدة على $\square$ ومقاربة نحو العدد $\sqrt{3}$

2-ب) لنبرهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

لنتحقق من أجل $n = 0$ أي : $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ و لنثبت : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

لدينا فرضا : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ ومنه : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$ (حسب سؤال رقم 1-ب) ومنه $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ صحيحة

وبالتالي $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ صحيحة

0.5ن

ج) نبين من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ ومنه $1 \leq u_n^2 \leq 3$ ومنه $2 \leq u_n^2 + 1 \leq 4$

ومنه $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2$ ومنه $-2 \leq -\sqrt{u_n^2 + 1} \leq -\sqrt{2}$ ومنه $0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2 - \sqrt{2}$ وبالتالي:

$$\square \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \geq 0 \quad \text{وعليه المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة على } \square$$

0.25ن

بما ان المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

3) نبين (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n :$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}}{3 - \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}} = \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1} \times \frac{u_n^2 + 1}{-u_n^2 + 3} = 4 \left(\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \right) = 4v_n$$

0.25ن

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{2}(4)^n$ أي $v_n = 2^{2n-1}$

عبارة الحد العام u_n بدلالة n : بوضع $v_n = y$ و $u_n = x$ المساواة $\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = v_n$ تكافئ

$$y = \frac{x^2}{3 - x^2} \text{ أي } y(3 - x^2) = x^2 \text{ أي } 3y - yx^2 = x^2 \text{ أي } 3y = yx^2 + x^2 = x^2(y + 1)$$

$$x^2 = \frac{3y}{1 + y} \text{ هذا يعني: } u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n} \text{ هذا يعني } u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} \text{ أو } u_n = -\sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} \text{ بمأن}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{3(2^{2n-1})}{1 + (2^{2n-1})}} \text{ أي } u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} \text{ المتتالية } (u_n) \text{ موجبة فإن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3} \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2n-1} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(2^{2n-1})}{1 + (2^{2n-1})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(2^{2n-1})}{(2^{2n-1})} = 3 \text{ لدينا}$$

$$p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)} \text{ حساب بدلالة } n \text{ الجداء:}$$

$$\begin{aligned} p_n &= v_0 \times v_1 \times v_2 \dots \times v_n = v_0 \times v_0 \times q \dots \times v_0 \times q^n \\ &= v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} \\ &= v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 4^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= 2^{-n-1} \times 2^{n^2+n} \\ &= 2^{n^2-1} \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني:

الجزء الأول:

تحديد وضعية المنحني (Γ) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا من أجل $x \in]-\infty, \alpha[\cup]0, +\infty[$ أعلى (Δ)

ومن أجل $x \in]\alpha, 0[$ أسفل (Δ)

ومن أجل $x = \alpha$ أو $x = 0$ لدينا $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{(\alpha, \alpha + 2), (0, 2)\}$

تحديد إشارة $g(x)$:

لدينا $g(x) = 0$ من أجل $x = \alpha$ أو $x = 0$

$g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha, 0[$ و $g(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty, \alpha[\cup]0, +\infty[$

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}$

حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(ex - 3) = -\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)e^{-x+1} = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty + \infty$ (حالة عدم التعيين) إزالتها

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(ex - 3) + e\left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} = 0 \text{ لأن}$$

نبين من أجل كل عدد حقيقي: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عبارة دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2e + e^{-x+1} - (x + 3)e^{-x+1} = 2e(e^{-x+1})(e^{+x-1}) + e^{-x+1} - (x + 3)e^{-x+1}$$

$$f'(x) = (e^{-x+1})[2e \times e^{x-1} + 1 - x - 3] = e^{-x+1}(2e^x - x - 2) = -e^{-x+1}(-2e^x + x + 2)$$

ومنه: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \text{ حساب}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0 \text{ لدينا}$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس عند نقطة ذات الفاصلة α موازي لحامل محور فواصل

دراسة اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

$$f'(x) = 0 \text{ من أجل } x = \alpha \text{ أو } x = 0$$

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty, \alpha[\cup]0, +\infty[$ معناه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $] -\infty, \alpha[$

07ن

0.25ن

0.50ن

0.25ن

0.25ن

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]0, \alpha[$ معناه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0, \alpha[$.

جدول تغيرات الدالة f

0.75ن

2-أ) نبين أن المستقيم (D) ذو المع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)e^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) e = 0$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : لدينا $f(x) - y = (x+3)e^{-x+1}$

إشارة $f(x) - y$ من إشارة العدد $x+3$ ومنه على المجال $]-\infty, -3]$ أسفل (D)

0.5ن

وعلى المجال $[-3, +\infty[$ أعلى (D) ومن أجل $x = -3$ يقطع (C_f) في نقطة $(-3, 2(-3e - 3))$

نبين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف: لدينا f' قابلة للإشتقاق على $\square$ و

0.25ن

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$$f''(x) = (x+1)e^{-x+1}$$

$f''(x)$ تنعدم عند قيمة $x_0 = -1$ مغيرة إشارتها وعليه النقطة $A(1, f(1) = 2e - 2)$ نقطة انعطاف للمنحني البياني (C_f)

نبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها β بحيث: $-2,4 < \beta < -2,3$

0.5ن

لدينا الدالة f معرفة و مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty, \alpha[$ و بالخصوص على المجال $[-2,4, -2,3]$ ومن جهة أخرى

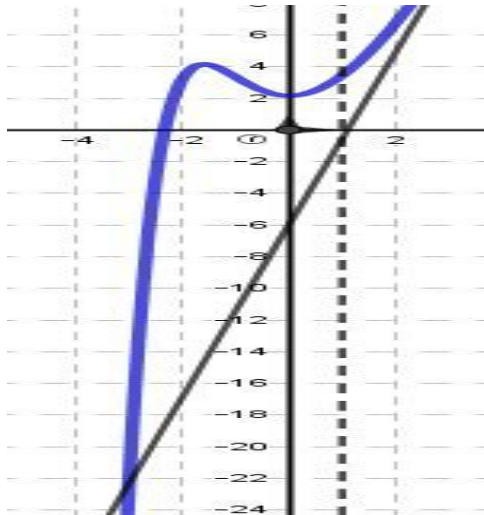
$$f(-2,3) \times f(-2,4) < 0 \text{ إذن حسب مبرهنة القيم}$$

المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-2,4 < \beta < -2,3$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة

0.25ن

فاصلتها β بحيث: $-2,4 < \beta < -2,3$

رسم المنحني (C_f) و (D)



إيجاد العددين الحقيقيين a و b بحيث

حتى تكون الدالة $x \rightarrow (ax + b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية لدالة

0.50ن

$$x \rightarrow (x+3)e^{-x+1} \text{ على } \square$$

تكون الدالة $x \rightarrow (ax + b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية

للدالة $x \rightarrow (x+3)e^{-x+1}$ إذا وفقط تحقق ما يلي من أجل كل

0.5ن

عدد حقيقي x لدينا: $ae^{-x+1} - (ax+b)e^{-x+1} = (x+3)e^{-x+1}$

أي

$$(-ax-b+a)e^{-x+1} = (x+3)e^{-x+1} \text{ بالمطابقة}$$

$$-a = 1 \text{ و } -b + a = 3 \text{ ومنه نجد } a = -1$$

$$\text{و } b = -4$$

0.5ن

حساب مساحة الحيز المحددة بين المستقيمين: $x = 1$ و $x = n$

بحيث $n > 1$ والمستقيم (D)

$$I_n = \int_1^n [f(x) - y] dx = \left[-(x+4)e^{-x+1} \right]_1^n = -(n+4)e^{-n+1} + 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(n+4)e^{-n+1} + 5 = +5 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -(n+4)e^{-n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{n}{e^n} + \frac{4}{e^n}\right)e = 0 \text{ لأن:}$$

حل التمرين الرابع:

(إيجاد α و β :

0.5ن

لدينا

$$\begin{cases} A = \beta + 8.9^1 + \alpha.9^2 + 2.9^3 \\ A = \beta + 7 + \alpha.7^2 + 5.7^3 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} A = \beta + 81\alpha + 1530 \\ A = \beta + 49\alpha + 1722 \end{cases}$$

ومنه

$$32\alpha - 192 = 0$$

$$\alpha = \frac{192}{32} = 6$$

وبالتالي

0.5ن

نعوض α في الجملة نجد:

$$\begin{cases} A = \beta + 2016 \\ A = \beta + 2016 \end{cases}$$

$$A \equiv 0[7]$$

لدينا

$$\beta + 2016 \equiv 0[7]$$

أي

$$\beta \equiv 0[7]$$

$$\beta = 7k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \beta < 7 \quad \text{بمأن}$$

$$\beta = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\beta = 0 \quad \text{و} \quad \alpha = 6 \quad \text{ومنه}$$

• كتابة العدد A في النظام العشري:

$$\beta = 0 \quad \text{و} \quad \alpha = 6 \quad \text{لدينا}$$

$$A = \beta + 81\alpha + 1530$$

$$A = 0 + 81(6) + 1530$$

$$A = 2016 \quad \text{ومنه}$$

(2) حساب PGCD :

$$PGCD(2016; 2268; 2772) = 252$$

$$(3) \text{ لدينا المعادلة (E) } 2772x - 2268y = 2016 \quad \text{تكافئ} \quad 11x - 9y = 8 \quad (*) \dots$$

إيجاد $(x_0; y_0)$:

$$\text{لدينا} \quad x_0 + y_0 = 8 \quad \text{تكافئ} \quad x_0 = 8 - y_0$$

$$\text{بالتعويض في (*) نجد:} \quad 11(8 - y_0) - 9y_0 = 8 \quad \text{تكافئ} \quad 88 - 11y_0 - 9y_0 = 8$$

$$88 - 20y_0 = 8 \quad \text{تكافئ}$$

$$y_0 = 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$(x_0; y_0) = (4; 4) \quad \text{ومنه}$$

$$\bullet \text{ استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E):} \quad \begin{cases} 11x - 9y = 8 \dots (*) \\ 11(4) - 9(4) = 8 \end{cases}$$

$$11(x - 4) = 9(y - 4) \quad \text{تكافئ} \quad 11(x - 4) - 9(y - 4) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$11/9(y - 4) \quad \text{أي}$$

$$PGCD(11; 9) = 1 \quad \text{و}$$

$$11/y - 4 \quad \text{حسب مبرهنة غوص :}$$

$$y - 4 = 11k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{أي}$$

0.25ن	ومنه $y = 11k + 4$	
	بالتعويض في (*) نجد $11x - 9(11k + 4) = 8$ تكافئ $11x - 99k - 36 = 8$	
0.50ن	$11x = 99k + 44$	تكافئ
	$x = 9k + 4$	تكافئ
	$S = \{(9k + 4; 11k + 4) / k \in \mathbb{Z}\}$	ومنه:
0.25ن	❖ (إيجاد قيم d:	
	$d / 11x - 9y$ هذا يعني $\begin{cases} d / x \\ d / y \end{cases}$	
0.25ن	$d / 8$ أي	
	$d \in \{1; 2; 4; 8\}$ و منه	
	(2) استنتاج الثنائية $(x; y)$:	
	لدينا $PGCD(x; y) = 2$ يكافئ $\begin{cases} 2 / (11k + 4) \\ 2 / (9k + 4) \end{cases}$	
	$\begin{cases} 11k + 4 \equiv 0[2] \\ 9k + 4 \equiv 0[2] \end{cases}$	يكافئ
	$\begin{cases} k \equiv 0[2] \\ k \equiv 0[2] \end{cases}$	يكافئ
01ن	$k = 2k'$; $k' \in \mathbb{Z}$ أي	
	ومنه $\begin{cases} x = 11(2k') + 4 \\ y = 9(2k') + 4 \end{cases}$	
	$S = \{(22k' + 4; 18k' + 4)\}$ إذن	
0.5ن		

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

0.5ن